

文章编号: 1000 - 7598 (2014) 04 - 1203 - 08

正交各向异性岩体裂纹扩展的扩展有限元方法研究

师 访^{1,2}, 高 峰^{1,2}, 杨玉贵^{1,2}

(1. 中国矿业大学 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221116; 2. 中国矿业大学 力学与建筑工程学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 石油开采和非常规天然气开采等领域经常遇到页岩、砂岩等沉积岩, 这类岩石材料往往具有正交各向异性特征。采用扩展有限元方法研究了正交各向异性岩体裂纹扩展问题, 并基于 Matlab 平台编写了数值计算程序 Betaxfem2D。将由复变函数法得到的裂纹尖端渐进位移场作为裂尖位移增强函数, 用相互作用积分法计算混合模式应力强度因子, 采用修改后的最大周向拉应力扩展准则确定裂纹扩展方向。与传统有限元方法的对比表明, 扩展有限元方法达到相同计算精度需要的自由度少, 节省计算机时。分别采用扩展有限元程序和传统有限元程序模拟了岩石试件 4 点弯曲试验, 二者所得结果一致。数值试验表明: 随着正交材料坐标系与空间坐标系夹角 α 的增大, 裂纹扩展方向角 γ 按照周期为 π 的近似正弦函数的规律变化; 保持剪切模量和泊松比不变时, 正弦函数的值域随着弹性模量比值 E_1/E_2 的减小而缩小, 但相位基本保持不变; 研究沉积岩断裂力学问题时, 岩石的正交各向异性特征不可忽略。

关 键 词: 扩展有限元法; 裂纹; 正交各向异性; 断裂力学

中图分类号: O 320

文献标识码: A

Application of extended finite element method to study crack propagation problems of orthotropic rock mass

SHI Fang^{1,2}, GAO Feng^{1,2}, YANG Yu-gui^{1,2}

(1. State Key Laboratory for Geomechanics & Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China; 2. School of Mechanics & Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China)

Abstract: Sedimentary rocks such as shale and sandstone are very common in the fields of oil and unconventional gas drilling; and they are often characterized by orthotropy. The extended finite element method is used for crack propagation analysis of orthotropic rock mass and a Matlab program Betaxfem2D has been developed. Asymptotic crack tip displacement fields deduced by function of complex variable method are adopted as the crack tip displacement enrichment function; and mixed mode stress intensity factors are calculated by the interaction integral (M-integral) method. Besides, a modified maximum circumferential tensile stress criterion is adopted to determine crack propagation direction. Compared with conventional finite element method (FEM), the results show that the extended finite element method needs less DOFs and less computer resources to achieve the same calculation accuracy. The extended finite element method program developed by this paper and the conventional FEM program are used to simulate the 4-point bending test of rock sample, and both of them show the same results. Numerical experiments show that crack propagation direction angle γ varies according to an approximate sine function with a period of π with the increase of α , i.e. the angle between the orthotropic material coordinate and the space coordinate. Besides, when shear modulus and Poisson ratio remain constant; the range of the sine function shrinks with the decrease of the ratio of the elasticity moduli E_1/E_2 , but the phase basically remains unchanged. So, the orthotropy of rock cannot be neglected when dealing with the fracture mechanics problems of sedimentary rock.

Key words: extended finite element method; crack; orthotropy; mechanics of fracture

1 引 言

石油工程、页岩气开采以及砂岩气开采等工程中遇到的岩石多为海、河相沉积岩^[1]。地层往往是由多次沉积而成, 因此, 这类岩石在垂直层理方向

和平行层理方向差异明显, 而在沉积层理平面内各方向的差异较小, 故常简化为正交各向异性或横观各向同性材料^[2]。裂缝性低渗透油藏在我国分布较广, 储量较大, 在石油工业中占有重要地位^[3], 因而研究石油开采过程中岩层天然裂缝以及后生裂缝

收稿日期: 2013-09-10

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(No. 2011CB201205); 江苏省普通高校研究生科研创新计划基金(No. CXZZ13_0922)。

第一作者简介: 师访, 男, 1988 年生, 博士研究生, 主要从事计算岩体力学方面的研究工作。E-mail: fshi@cumt.edu.cn

的扩展问题具有重要工程意义。而在页岩气开采以及砂岩气开采等非常规天然气开采过程中, 水压致裂或气体压裂等技术是天然气开发的关键^[4], 因而探究天然气储层中的裂纹萌生、扩展以及压裂问题至关重要。此外, 工程上常见的锚杆加固岩体也常常表现出正交各向异性特征^[5], 在沿着锚杆布置方向和垂直于锚杆轴线的平面内岩体力学特性明显不同, 而此类锚固岩体又关系到巷道安全。

扩展有限元方法 (Extended finite element method) 是基于单位分解思想的数值计算方法^[6], 这一方法在传统有限元方法 (Finite element method) 的基础上进行了重要改进。该法基本思想是用扩充的带有不连续性质的形函数基来表示计算域内的强、弱间断, 自 1999 年由美国西北大学 Belytschko 教授及其团队^[7-10]提出以来得到了飞速发展, 其最大的特点是裂纹扩展路径不受有限元网格划分的影响, 可直观再现裂纹扩展过程。扩展有限元法继承了有限元法的全部特点和优势, 同时克服了在裂纹尖端高应力和变形集中区进行高密度网格划分所带来的困难。有限元法在处理裂纹问题时, 单元网格必须与裂纹面重合, 而扩展有限元法裂纹面不依赖于网格, 能真实模拟裂纹扩展过程, 对于分析裂纹问题具有得天独厚的优势。近年来, 扩展有限元法研究取得了丰硕成果。Moës 等^[10]以及 Sukumar 等^[11]将该法推广到了三维, Daux 等^[12]研究了裂纹分叉问题的该法描述方法; Dumstorff 等^[13]对比了不同裂纹扩展准则, 并研究了这些扩展准则在该法中的适用性; Asadpoure 等^[14]利用该法研究了正交材料中的静态裂纹问题, 但没有考虑裂纹的扩展过程。在动态裂纹扩展方面, Belytschko 等^[15]以及 Réthoré 等^[16]进行了相关研究。

国内外学者对各向异性岩体裂纹问题也进行了相关的研究。早在 1964 年 Hoek^[17]便依据 Griffith 理论研究了各向异性岩石的断裂问题; Walsh 等^[18]给出了一种脆性各向异性岩体裂纹扩展准则; Noorishad 等^[19]用有限元方法研究了断续节理岩体的流固耦合问题; CHEN 等^[20]用边界元方法研究了各向异性岩体的断裂力学问题, 但未见采用扩展有限元法研究正交各向异性岩体的裂纹及其扩展问题的报道。本文采用该法研究正交各向异性岩体裂纹问题, 确定适合正交各向异性材料的裂纹尖端位移增强函数, 用相互作用积分法计算应力强度因子, 并选取适用于正交各向异性材料的裂纹扩展准则, 最后编写了 Matlab 程序 Betaxfem2D, 并给出了两个算例。算例 1 为验证性算例, 算例 2 模拟了不同

材料方向下正交各向异性岩石四点弯曲试验, 并与传统有限元裂纹扩展分析程序 Franc2D 进行了比较。

2 本构关系

对于二维平面问题, 正交各向异性材料本构关系可以写成刚度系数矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

也可写成柔度系数矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{11} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中, 刚度系数矩阵和柔度系数矩阵由材料参数以及材料坐标系 (m_1, m_2) m_1 方向与空间正交坐标系 x 轴的夹角 α 求得^[21]。若 $\alpha = 0^\circ$, 则 $Q_{16} = Q_{26} = S_{16} = S_{26} = 0$ 。

3 扩展有限元方法

1999 年, Belytschko 等^[7]首次提出用独立于网格划分的有限元来解决裂纹扩展问题, 在传统有限元法的基础上采用裂纹近场位移解对裂纹面及裂纹尖端的节点进行增强。随后 Moës 等^[9]引入阶跃函数和裂尖增强函数分别对裂纹面和裂纹尖端进行描述, 并将该方法称为扩展有限元方法。

3.1 基本格式

对于由 n 个节点构成的有限元模型内的点 x , 假如该有限元模型内包含一不连续面, 则点 x 的 XFEM 位移可表示成传统有限元节点位移 u^{FE} 和增强节点位移 u^{enr} 之和:

$$u^h(x) = u^{\text{FE}} + u^{\text{enr}} = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x) \psi(x) a_k \quad (3)$$

式中: u_j 为传统有限元节点位移自由度向量; N_j 为与节点 j 对应的形函数; a_k 为附加位移自由度向量, m 为增强节点数目; $\psi(x)$ 为增强节点 k 形函数 N_k 的影响区域 (如图 1 所示) 内的增强函数, N_k 是与节点 k 对应的形函数。

针对裂纹问题, 式 (3) 可进一步写成

$$u^h(x) = u^{\text{FE}}(x) + u^{\text{H}}(x) + u^{\text{tip}}(x) \quad (4)$$

式中: $u^{\text{H}}(x)$ 为裂纹面两边增强节点位移自由度向量; $u^{\text{tip}}(x)$ 为裂纹尖端增强节点位移自由度向量。其显式表达式为

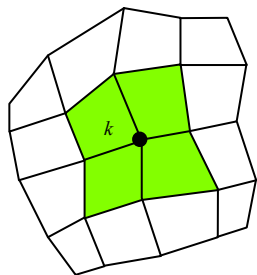


图 1 平面单元节点 k 影响区域

Fig.1 Influence domain for node k of element in 2D

$$u^h(x) = \left[\sum_{j=1}^n N_j(x) u_j \right] + \left[\sum_{h=1}^{m_h} N_h(x) H(x) a_h \right] + \left[\sum_{k=1}^{m_t} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^4 F_l(x) b_k^l \right) \right] \quad (5)$$

式中： m_h 为裂纹面两边增强节点数； $H(x)$ 为 Heaviside 增强函数； a_h 为裂纹面两端增强节点自由度向量； m_t 为裂尖增强节点数； $F_l(x)$ 为裂尖增强函数； b_k^l 为第 k 个裂尖增强节点的自由度向量。Heaviside 增强函数 H 本质上是符号距离函数，其表达式为

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (6)$$

3.2 裂尖位移增强函数

Nobile 等^[22]利用复变函数方法求得正交各向异性介质中裂纹尖端局部位移场，在此基础上，Asadpoure 等^[14]得到了裂尖局部极坐标系 (r, θ) 下正交材料裂尖位移增强函数表达式：

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \\ &\sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中：

$$g_k(\theta) = \left(\cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{e_k^2} \right)^{1/2} \quad k=1,2 \quad (8)$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{e_k} \right) \quad k=1,2 \quad (9)$$

上述式 (8) 和 (9) 中 e_1 及 e_2 表达式为

$$u_1^{\text{aux}} = K_I^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} R e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ s_1 p_2 \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} - s_2 p_1 \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right\} \right] + K_{II}^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} R e \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ p_2 \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} - p_1 \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \left(A - \left(A^2 - \frac{Q_{22}}{Q_{11}} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\ e_2 &= \left(A + \left(A^2 - \frac{Q_{22}}{Q_{11}} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

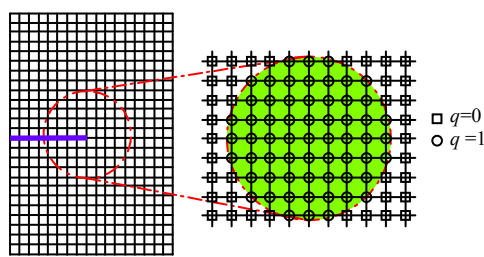
$$\text{其中, } A = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{66}}{Q_{11}} + \frac{Q_{22}}{Q_{66}} - \frac{(Q_{12} + Q_{66})^2}{Q_{11} Q_{66}} \right)$$

4 应力强度因子

应力强度因子是裂纹扩展判据的重要参数，扩展有限元法中常采用相互作用积分来求解应力强度因子。相互作用积分定义式为^[7]

$$M = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{\text{aux}}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{\text{aux}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - w^M \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (11)$$

积分区域为以裂尖为原点的圆形区域，如图 2(a) 所示。式 (11) 中： w^M 为应变能密度， $w^M = (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\text{aux}} + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{\text{aux}}) / 2$ ； u_i 、 σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为裂纹尖端真实应力-变形场的位移、应力和应变； u_i^{aux} 、 σ_{ij}^{aux} 和 $\varepsilon_{ij}^{\text{aux}}$ 分别为裂纹尖端附加应力-变形场的位移、应力和应变，其中应变分量 $\varepsilon_{ij}^{\text{aux}} = (u_{i,j}^{\text{aux}} + u_{j,i}^{\text{aux}}) / 2$ 。 q 为权函数， q 在 M 积分圆内的节点上取值为 1 (如图 2(b) 中的圆圈标记的节点所示)，其余位置取值为 0 (如图 2(b) 中的方框标记的节点所示)。 M 积分圆半径取 $3\sqrt{A_{\text{elem}}}$ 即可达到较高的精度^[7]， A_{elem} 表示单元面积。



(a) 裂纹尖端的积分圆 M (b) 权函数 q 取值示意图

图 2 权函数 q

Fig.2 The weight function q

对于正交各向异性岩石，裂纹尖端局部极坐标系下附加裂尖应力-变形场为^[14, 23]

$$u_2^{\text{aux}} = K_I^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ s_1 q_2 \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} - s_2 q_1 \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right\} \right] + K_{II}^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ q_2 \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} - q_1 \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (13)$$

$$\sigma_{11}^{\text{aux}} = \frac{K_I^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right\} \right] + \frac{K_{II}^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{22}^{\text{aux}} = \frac{K_I^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right\} \right] + \frac{K_{II}^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (15)$$

$$\sigma_{12}^{\text{aux}} = \frac{K_I^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right\} \right] + \frac{K_{II}^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (16)$$

式中：虚数 s_1 、 s_2 为裂纹尖端材料参数，可通过求解下式^[23]获得：

$$S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2 + S_{22} = 0 \quad (17)$$

式 (17) 的根为两对符号相反的共轭虚数，取其中的正虚数根。式 (12) (13) 中的 p_k 和 q_k 由下式求得：

$$p_k = S_{11}s_k^2 + S_{12}, q_k = S_{12}s_k + \frac{S_{22}}{s_k}, k=1, 2 \quad (18)$$

结合式 (11)~(18)，经过推导可得^[14]

$$M = 2t_{11}K_I K_I^{\text{aux}} + t_{12}(K_I K_{II}^{\text{aux}} + K_I^{\text{aux}} K_{II}) + 2t_{22}K_{II} K_{II}^{\text{aux}} \quad (19)$$

其中：

$$t_{11} = -\frac{S_{22}}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right),$$

$$t_{12} = -\frac{S_{22}}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{s_1 s_2} \right) + \frac{S_{22}}{2} \operatorname{Im}(s_1 s_2),$$

$$t_{22} = -\frac{S_{11}}{2} \operatorname{Im}(s_1 + s_2).$$

设附加场分别满足以下两个状态；状态 1：

$K_I^{\text{aux}} = 1$ 且 $K_{II}^{\text{aux}} = 0$ ；状态 2： $K_I^{\text{aux}} = 0$ 且 $K_{II}^{\text{aux}} = 1$ 。

将这两个状态代入式 (19)，则得到线性方程组：

$$\left. \begin{aligned} M^{(1)} &= 2t_{11}K_I + t_{12}K_{II} \\ M^{(2)} &= t_{12}K_I + 2t_{22}K_{II} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $M^{(1)}$ 和 $M^{(2)}$ 由式 (11) 经数值积分获得，求解该线性方程组即可得到应力强度因子 K_I 和 K_{II} 。

5 裂纹扩展准则

对于正交各向异性岩体而言，传统的各向同性裂纹扩展准则不再适合，Saouma 等^[24]将最大周向拉应力准则推广到了各向异性材料，认为使得 $K_{\gamma\gamma} / K_{lc}^\gamma$ 取最大值时的 γ 角为裂纹扩展角，即 γ 满足下式：

$$\max \left\{ \frac{K_{\gamma\gamma}}{K_{lc}^\gamma} \right\} \quad (21)$$

式中： $K_{\gamma\gamma} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{\gamma\gamma}$ ，其中 $\sigma_{\gamma\gamma}$ 为极坐标系下的周向拉应力； K_{lc}^γ 是正交各向异性岩体断裂韧度，其值与 γ 有关，表达式为

$$K_{lc}^\gamma = K_{lc}^1 \cos^2 \gamma + K_{lc}^2 \sin^2 \gamma \quad (22)$$

式中： K_{lc}^1 和 K_{lc}^2 分别为沿正交材料两个主轴方向 m_1 和 m_2 的断裂韧度，如图 3 所示。

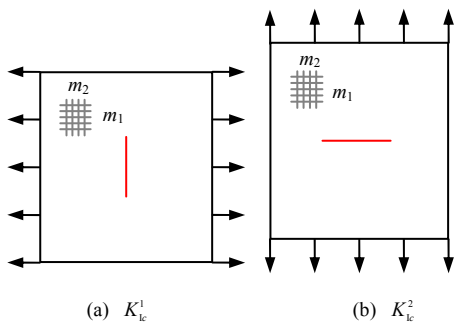


图 3 正交各向异性材料断裂韧度

Fig.3 Fracture toughness for orthotropic material

$$\sigma_{\gamma\gamma} \text{ 的表达式为}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 t_1 - s_2 t_2}{s_1 - s_2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{t_1 - t_2}{s_1 - s_2} \right] \quad (23)$$

其中：

$t_1 = (s_2 \sin \gamma + \cos \gamma)^{3/2}$ ， $t_2 = (s_1 \sin \gamma + \cos \gamma)^{3/2}$ 。将式 (22) 和 $K_{\gamma\gamma}$ 表达式代入式 (21) 可得裂纹扩展角 γ 判断式为

$$\max \left\{ \frac{K_I \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 t_1 - s_2 t_2}{s_1 - s_2} \right] + K_{II} \operatorname{Re} \left[\frac{t_1 - t_2}{s_1 - s_2} \right]}{K_{Ic}^1 \cos^2 \gamma + K_{Ic}^2 \sin^2 \gamma} \right\} \quad (24)$$

6 算 例

本文基于 Matlab R2009 平台编写了扩展有限元程序 Betaxfem2D, 分析了两个算例：算例 1 为验证性算例，计算了正交各向异性材料中心裂纹的应力强度因子，并与有限元法计算结果进行了对比；算例 2 模拟了正交各向异性岩石试件 4 点弯曲试验过程中的裂纹扩展过程，并用有限元程序 Franc2D 进行了验证。

6.1 程序验证：板的单轴拉伸

如图 4(a)所示，平板尺寸为 $l \times h = 20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ ，平面应力模型，中心裂纹宽度为 $2a = 2 \text{ m}$ ，受单轴拉伸载荷 P 作用， P 为单位应力 ($P = 1 \text{ N/m}^2$)。试件材料 m_1 方向弹性模量 $E_1 = 114.8 \text{ GPa}$ ，材料 m_2 方向弹性模量 $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$ ，剪切模量 $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\nu_{12} = 0.21$ 。单元采用 4 节点 4 积分点等参单元，为解决裂纹面两边位移间断造成的积分困难，将增强单元剖分成若干个三角形，再将每个三角形看作 7 积分点三角形等参元计算。有限元网格局部放大图如图 4(b)所示，其中被方框包围的是裂纹尖端增强节点，被圆圈包围的是 Heaviside 增强节点。

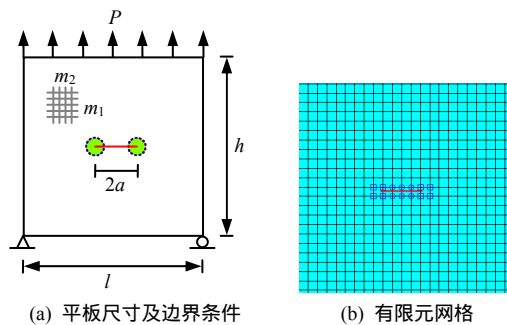


图 4 中心裂纹平板几何模型、边界条件及有限元网格
Fig.4 Geometry and boundary conditions for a plate with a central crack and the FE model

首先研究程序的网格依赖性。Kim 等^[25]提出了用有限元法解决正交各向异性材料中裂纹扩展问题，并将相关代码写入了有限元裂纹扩展计算程序 Franc2D，Kim 给出该问题应力强度因子为 $1.767 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。误差按照公式 $\text{Error} = \frac{1.767 - K_I}{1.767} \times 100\%$ 计算。如图 5 所示，当单元数超过 600 后，误差即小于 2%，此后趋于稳定，说明程序对网格划分密度的要求较低。

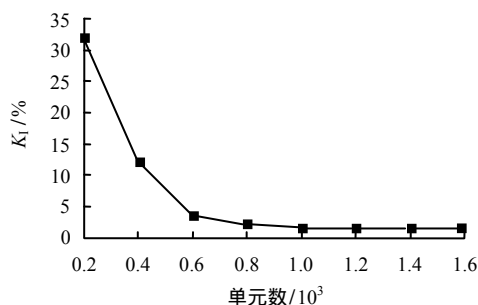


图 5 网格密度对应力强度因子 K_I 的影响
Fig.5 Influence of mesh density on the stress intensity factor K_I

计算结果与 Kim 结果的对比如表 1 所示，扩展有限元法共使用了 1 640 个单元和 1 722 个节点，有限元法使用了 2 001 个单元和 5 851 个节点，计算结果仅相差 1.4%，但前者总自由度却比后者少了 5 倍，节省了大量的计算机资源。该算例说明了程序 Betaxfem 2D 的可靠性，同时可以看出前者在处理裂纹问题时的优势。 y 方向应力云图如图 6 所示，单位为 Pa，可见裂纹尖端的应力集中效应，而裂纹中间区域由于裂纹的张开，导致 y 方向应力减小。

表 1 应力强度因子 K_I

Table 1 Values of the stress intensity factor K_I

数值方法	单元数	节点数	自由度数	$K_I / (\text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2})$
有限元法	2 001	5 851	11 702	1.767
扩展有限元法	1 640	1 722	1 760	1.792

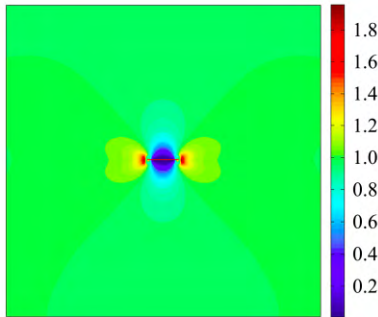


图6 σ_y 应力云图
Fig.6 Stress nephogram of σ_y

6.2 正交各向异性岩块4点弯曲试验

试件尺寸 $l \times h = 0.6 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$,平面应力模型 , 初始裂纹长度 a 为 $h/4$, 如图7所示。试件材料 m_1 方向弹性模量 $E_1 = 9.9 \text{ GPa}$, 材料 m_2 方向弹性模量 $E_2 = 1.1 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G_{12} = 0.8 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu_{12} = 0.21$ 。试件断裂韧度 $K_{lc}^1 = 1.2 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 、 $K_{lc}^2 = 0.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$, 载荷 F 为 25 kN 。如图7所示 , 材料坐标系 m_1 方向与空间坐标 x 轴的夹角为 α , α 取 $0^\circ \sim 180^\circ$, 图中 γ 为裂纹扩展方向角。

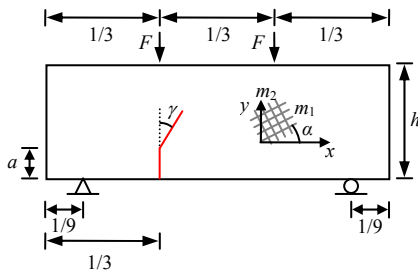
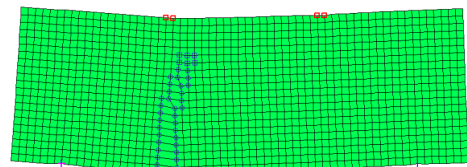
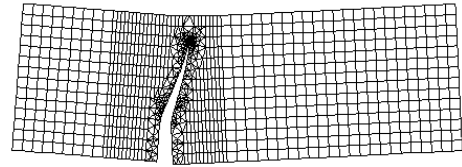


图7 4点弯曲梁几何模型及边界条件
Fig.7 Geometry and boundary conditions of the 4-point bending beam

模型共 1 281 个单元 , 每个裂纹扩展步裂纹增量 $\Delta a = 1.0 \sqrt{A_{clem}}$, 每步计算过后根据当前裂纹路径更新裂纹增强函数。利用 Franc2D 程序进行相同的模拟。图 8(a)给出了 $\alpha = 0^\circ$ 时本文方法计算得到的网格变形情况 , 图 8(b)为 Franc2D 所得结果 , 二者所得裂纹扩展路径一致 , 由于 Franc2D 需要进行网格重构 , 且其裂纹尖端网格需要划分的很密 , 因而需要花费更多计算时间。图 9 给出了 $\alpha = 90^\circ$ 时的网格变形图 , 同样可见 , 两种方法计算结果一致。图 10(a)为 $\alpha = 90^\circ$ 时 x 方向的位移云图 , 显示了裂纹两侧位移的强间断特征 , 图 10(b)为对应的剪切应力云图 , 裂尖应力集中效应显著。

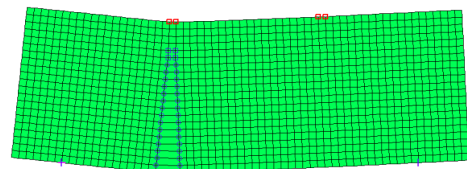


(a) Betaxfem2D

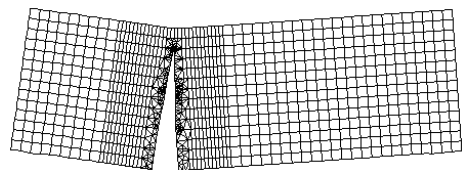


(b) Franc2D

图8 $\alpha = 0^\circ$ 时裂纹扩展路径及网格变形
Fig.8 Crack propagation path and deformed mesh when $\alpha = 0^\circ$

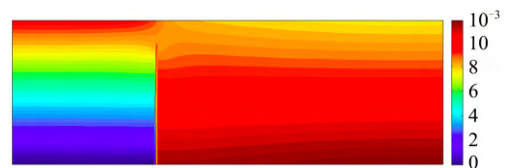


(a) Betaxfem2D

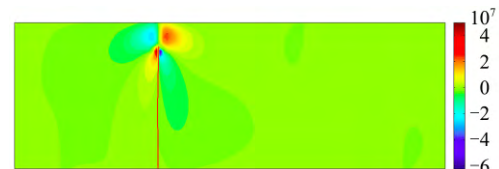


(b) Franc2D

图9 $\alpha = 90^\circ$ 时裂纹扩展路径及网格变形
Fig.9 Crack propagation path and deformed mesh when $\alpha = 90^\circ$



(a) x 方向位移/m



(b) 剪切应力/Pa

图10 $\alpha = 90^\circ$ 时 x 方向位移和剪切应力云图
Fig.10 Nephogram of x displacement and shear stress when $\alpha = 90^\circ$

材料方向角 α 从 0° 到 180° 增大的过程中 , 裂纹扩展角 γ 的变化情况如图 11 所示 , 可以看到本文扩

展有限元程序 Betaxfem2D 与传统有限元程序 Fracn2D 所得结果一致。随着 α 的增大, γ 近似按照周期为 π 的正弦函数变化。当 α 为 35° 时, γ 取得最大值 30° , α 为 135° 时, γ 取得最小值为 -8° , 即 γ 的取值范围是 $(-8^\circ, 30^\circ)$ 。

为了考察材料参数对裂纹扩展方向的影响, 保持 $E_1 = 9.9 \text{ GPa}$ 、 $G_{12} = 0.8 \text{ GPa}$ 、 $\nu_{12} = 0.21$ 不变, E_2 分别取 1.98 和 4.95 GPa , 采用 Betaxfem2D 进行计算, 得到不同弹性模量比 E_1/E_2 对应的 $\alpha - \gamma$ 变化曲线, 如图 12 所示。当 E_1/E_2 减小至 5 时, γ 的范围从 $(-8^\circ, 30^\circ)$ 缩小至 $(-5^\circ, 26^\circ)$, 而当 $E_1/E_2 = 2$ 时, γ 的范围进一步减小至 $(-1^\circ, 19^\circ)$ 。显然, 对于各向同性材料而言 ($E_1/E_2 = 1$), 该近似正弦函数退化为水平线。值得注意的是, E_1/E_2 的改变对近似正弦函数的相位和周期没有影响, 即最大值与最小值取得的位置 (35° 附近取得最大值, 135° 附近取得最小值) 基本保持不变。此外, 从图 12 可以看出, 虽然 E_1/E_2 仅为 2 , 但随着 α 的改变, γ 的变化仍十分显著, 因此, 在研究沉积岩等正交各向异性特征明显的材料断裂力学问题时, 不可忽略其正交各向异性特征。

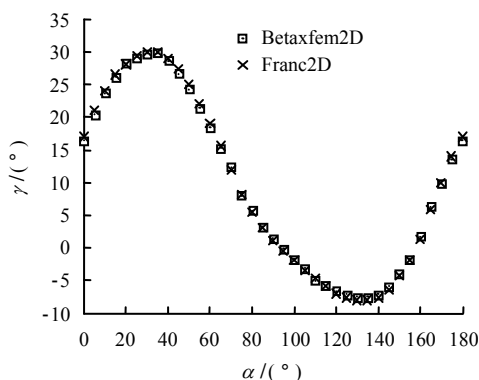


图 11 不同材料方向角 α 对应的裂纹扩展方向角 γ
Fig.11 Crack propagation direction angle γ for different material direction angle α

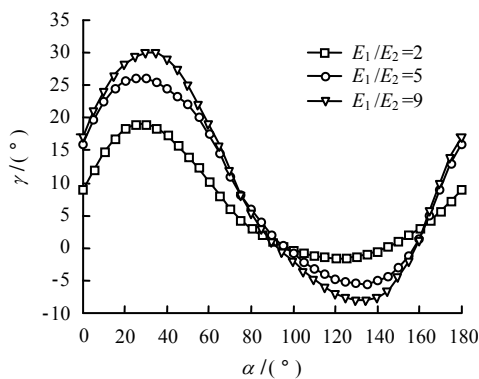


图 12 E_1/E_2 比值对 γ 的影响
Fig.12 Influences of the ratio of E_1/E_2 on γ

7 结 论

(1) 随着材料坐标 m_1 方向与空间坐标 x 轴夹角 α 的增大, 裂纹扩展方向角 γ 按照周期为 π 的正弦函数的规律变化。

(2) 正弦函数的值域随着材料弹性模量比 E_1/E_2 的减小而缩小, 但相位和周期保持不变。

(3) 研究沉积岩断裂力学问题时, 材料的正交各向异性特征不可忽略。

参 考 文 献

[1] 魏建新, 狄帮让, 王椿镛. 岩石正交各向异性的实验观测[J]. 地球物理学进展, 2008, 23(2): 343 - 350.
WEI Jian-xin, DI Bang-rang, WANG Chun-yong. The experimental observation of the rock orthorhombic anisotropy[J]. **Progress in Geophysics**, 2008, 23(2): 343 - 350.

[2] 左双英, 叶明亮, 唐晓玲, 等. 层状岩体地下洞室破坏模式数值模型及验证[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 1): 278 - 283.
ZUO Shuang-ying, YE Ming-liang, TANG Xiao-ling, et al. Numerical model and validation of failure mode for underground caverns in layered rock mass[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Supp.1): 278 - 283.

[3] 裴桂红, 刘建军, 刘绍轩. 裂缝性低渗透油藏开发方案研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(增刊 2): 2588 - 2592.
PEI Gui-hong, LIU Jian-jun, LIU Shao-xuan. Study of development scheme of fractured low permeability oil reservoir[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(Supp. 2): 2588 - 2592.

[4] 谢和平, 高峰, 鞠杨, 等. 页岩储层压裂改造的非常规理论与技术构想[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2012, 44(6): 1 - 6.
XIE He-ping, GAO Feng, JU Yang, et al. Unconventional theories and strategies for fracturing treatments of shale gas strata[J]. **Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)**, 2012, 44(6): 1 - 6.

[5] 张玉军, 刘谊平. 锚固正交各向异性岩体的三维弹塑性有限元分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(8): 1115 - 1119.
ZHANG Yu-jun, LIU Yi-ping. 3D elasto-plastic FEA for bolted orthotropic rockmass[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(8): 1115 - 1119.

[6] ABDELAZIZ Y, HAMOUINE A. A survey of the extended finite element[J]. **Computers and Structures**,

- 2008, 86(1 - 2): 1141 - 1151.
- [7] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 45(5): 601 - 620.
- [8] BELYTSCHKO T, MOËS N, USUI S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50(4): 993 - 1013.
- [9] MOËS N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46(1): 131 - 150.
- [10] MOËS N, GRAVOUIL A, BELYTSCHKO T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite elements and level sets part I: mechanical model[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002, 53(11): 2549 - 2568.
- [11] SUKUMAR N, MOËS N, MORAN B, et al. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000, 48(11): 1549 - 1570.
- [12] DAUX C, MOËS N, DOLBOW J, et al. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000, 48(12): 1741 - 1760.
- [13] DUMSTORFF P, MESCHKE G. Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2007, 31(2): 239 - 259.
- [14] ASADPOURE A, MOHAMMADIB S, VAFAI A. Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method[J]. **Thin-Walled Structures**, 2006, 44(9): 1031 - 1038.
- [15] BELYTSCHKO T, HAO C H, XU J, et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2003, 58(12): 1873 - 1905.
- [16] RÉTHORÉ J, GRAVOUIL A, COMBESCURE A. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 63(5): 631 - 659.
- [17] HOEK E. Fracture of anisotropic rock[J]. **Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy**, 1964, 64(10): 501 - 518.
- [18] WALSH J B, BRACE W F. A fracture criterion for brittle anisotropic rock[J]. **Journal of Geophysical Research**, 1964, 69(16): 3449 - 3456.
- [19] NOORISHAD J, AYATOLLAHI M S, WITHERSPOON P A. A finite-element method for coupled stress and fluid flow analysis in fractured rock masses[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 1982, 19(4): 185 - 193.
- [20] CHEN C S, PAN E, AMADEI B. Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 1998, 35(2): 195 - 218.
- [21] AUTAR K. KAW. Mechanics of composite materials (second edition)[M]. London: Taylor & Francis Group, 2006.
- [22] NOBILE L, CARLONI C. Fracture analysis for orthotropic cracked plates[J]. **Composite Structures**, 2005, 68(3): 285 - 293.
- [23] SIH G C, PARIS P C, IRWIN G R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies[J]. **International Journal of Fracture Mechanics**, 1965, 1(3): 189 - 203.
- [24] SAOUMA V E, MOHAMED L A, DANIEL A L. Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1987, 27(2): 171 - 184.
- [25] KIM J H, PAULINO G H. Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2002, 69(14 - 16): 1557 - 1586.