扩展有限元理论及 Fortran 编程

师　访　著

中国矿业大学出版社
· 徐州 ·

图书在版编目(CIP)数据

扩展有限元理论及 Fortran 编程/师访著. —徐州：
中国矿业大学出版社，2020.5

ISBN 978-7-5646-1370-9

Ⅰ. ①扩… Ⅱ. ①师… Ⅲ. ①有限元法—研究②
FORTRAN 语言—程序设计 Ⅳ. ①O241.82②TP312.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 233145 号

书　　名 扩展有限元理论及 Fortran 编程
著　　者 师　访
责任编辑 仓小金
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83884103　83885105
出版服务 (0516)83995789　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本 787 mm×1092 mm　1/16　**印张** 16.5　**字数** 428 千字
版次印次 2020 年 5 月第 1 版　2020 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 58.00 元

前　言

扩展有限元法(eXtended finite element method,XFEM)是在有限元法(finite element method,FEM)基础上发展而来的,专门用于分析断裂、孔洞、夹杂等强弱间断问题的新型数值方法,自1999年被提出以来得到了快速发展,也是近20年来国际计算力学研究的热点,截至2018年12月,谷歌学术中以"extended finite element method"为关键字可搜索到1.38万条结果(搜索范围为1999年至2018年)。

作者在博士学习和博士后科研工作期间编写了通用有限元和扩展有限元程序PhiPsi(http://phipsi.top),可用于二维、三维有限元和扩展有限元分析,程序采用计算效率极高的Fortran语言编写,核心代码量达12万行。在长期的计算力学理论和数值算法研究过程中作者积累了一些学习经验和研究心得,故撰写本书,希望能够抛砖引玉,为有限元和扩展有限元学习者提供相关参考和建议。

本书第1章回顾了扩展有限元法在脆性断裂、延性断裂、疲劳断裂、复合材料、位错、板壳断裂、含裂缝温度场、水力压裂等方面的研究进展。第2章详细介绍了扩展有限元法的基础——有限元法的基本概念,重点阐述了利用虚功原理和伽辽金法推导有限元基本方程的一般过程。作为扩展有限元的核心部分,第3章重点介绍了线弹性、小变形假设下强弱间断问题的控制方程、扩展有限元离散过程以及Fortran编程实现方法。本书提供了作者编写的扩展有限元程序PhiPsi,并附有Fortran源码,为便于使用,第4章对PhiPsi的程序结构、文件系统、子程序、函数和内部变量做了详细说明。接着,本书将分别研究交叉裂缝(第5章)、摩擦接触问题(第6章)、水力压裂问题(第7章)、动态断裂问题(第8章)以及三维断裂问题(第9章)的扩展有限元分析方法。最后,第10章将介绍图形用户界面(GUI)编程方法,并结合Visual Basic.net语言对诸如绘图对象的缩放、程序窗体的动态尺寸调整等编程细节做详细说明。扩展有限元法涉及较

为广泛的数学知识(例如偏微分方程、变分原理、散度定理、张量、线性和非线性方程组的求解),本书附录部分对这些数学知识作了简要介绍。另外,附录部分还包括 Fortran 编程语言、OpenMP 并行计算、稀疏矩阵存储等方面的内容。

本书书稿得到了北京临近空间系统工程研究所刘陆广博士和南京水利科学研究院岩土工程研究所傅中志博士认真、细致的审阅,他们提出了许多宝贵意见,在此深表谢意。在作者的学习和工作过程中,得到了许多老师的关心、支持和帮助,在此特向我的导师中国矿业大学高峰教授,以及我的博士后合作导师中国科学技术大学吴恒安教授表示由衷的感谢。

作者在扩展有限元研究方面获得国家自然科学基金青年基金项目(51904111)、江苏省自然科学基金青年基金项目(BK20170457)以及江苏省先进制造技术重点实验室开放课题项目(HGAMTL—1712)资助,在此表示感谢。

限于编者水平,本书难免存在疏漏、缺点和错误,敬请读者批评指正(读者反馈网址:http://phipsi.top/other_book_xfem.html)。

著　者

2019 年 9 月于淮安

目 录

第1章　引　　言

1.1　扩展有限元法综述

1.1.1　扩展有限元法简介

结构中裂缝的存在严重影响其强度和稳定性，裂缝的失稳扩展将引发严重后果。然而，某些情况下我们希望得到更多的裂缝，比如能源开展领域广泛使用的水力压裂增产措施（第7章）。因此，借助断裂力学相关理论和分析工具研究结构中裂缝的萌生和扩展规律具有重要意义。

和其他力学问题类似，断裂力学问题研究方法主要包括理论方法、数值方法和试验方法等三种。其中，由于断裂问题的复杂性，理论分析方法的作用极为有限，仅能用于研究形状规则、载荷简单的受力构件的断裂问题。随着计算机技术的发展和普及，数值方法在力学的方方面面得到了充分的发展，现已涌现出多种可用于断裂分析的数值分析方法，常用的包括有限元法、边界元法、扩展有限元法等。

有限元法是求解偏微分方程的有力工具之一，多年的发展过程中涌现出许多用于求解断裂力学问题的有限元模型[1]，其中有些采用近似方法描述裂缝（比如借助损伤模型），有些直接描述真实裂缝面，例如连续损伤力学模型[2]、内聚力模型[3]，以及基于应力强度因子、能量释放率、J积分等参数的断裂力学模型。基于断裂力学的有限元法在描述裂缝问题时，需要确保裂缝面和单元边界重合以及在裂尖附近需要划分较密的网格，裂缝扩展后需重新进行网格划分，此外还涉及前后网格节点间的数据映射问题[4]。

实际上，早在1974年Benzley[5]就提出了增强有限元（enriched finite element method）的思想，Benzley根据静态断裂问题的解析解，对裂缝尖端附近的节点位移插值函数进行增强，使其包含裂尖位移场的信息。随后Atluri等[6]、Gifford等[7]针对稳态裂缝问题对这一思想进行了完善，然而直到20多年后的1999年，理论完善、便于实施、具有实际应用价值、可用于研究各类强弱间断问题的扩展有限元法[8-10]才出现。为了克服常规有限元法模拟断裂问题及裂缝扩展问题的缺陷，美国西北大学（Northwestern University）以Belytschko教授为主的研究团队提出了基于单位分解理论[11]的扩展有限元法，该方法只需要最初划分一次有限元网格，随后裂缝可在有限元网格中任意扩展，相比常规有限元法具有极大的优势，因此自提出以来得到了全世界学者的广泛关注，取得了丰硕的研究成果。

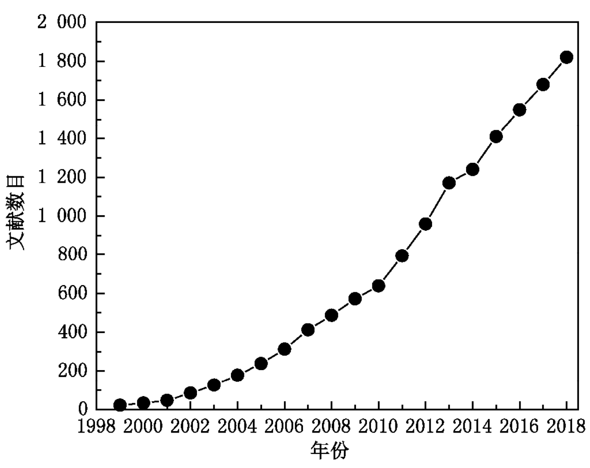
单位分解法和插值函数的扩充是扩展有限元法的理论基础，由Melenk和Babuška于

1996 年提出[11]，通俗地讲就是单元上任意一点形函数的和为 1，即 $\sum_{j=1}^{n} N_j(x)=1$，其中 n 是单元节点数目。实际上，形函数的这一特性是显而易见的，设想某有限元模型发生了刚体平动，即全部节点位移相同且假设为 d，为了保证单元内任意点 x 的位移插值结果（$u(x)=\sum_{j=1}^{n} N_j(x)\tilde{u}_j$，其中 $\tilde{u}_j$ 表示节点 j 的位移，$\tilde{u}_j=d$）为 d，则显然需要保证 $\sum_{j=1}^{n} N_j(x)=1$。另一方面，插值函数的扩充思想是由 Fleming 等[12]在 1997 年提出并用于单元自由伽辽金法（element-free Galerkin method）的。随后，基于单位分解理论和插值函数扩充理论，Belytschko教授等人在 1999 年提出了扩展有限元法，该方法在有限元插值函数中引入了一些特殊函数，称为增强函数。例如模拟裂缝时，引入 Heaviside 增强函数用于描述裂缝面两侧位移的突然变化（强间断），引入裂尖增强函数用于描述裂尖附近位移场特征[9,10]。由于只是修改了插值函数，有限元法的特性和优点得以完全保留。

扩展有限元法研究断裂问题可概括为三类：(1) 基于线弹性断裂力学的扩展有限元法[9,10]（the linear elastic fracture mechanics based XFEM）；(2) 基于内聚力模型（也称为黏聚力模型）的扩展有限元法[13,14]（the cohesive zone model based XFEM）；(3) 基于弹塑性断裂力学的扩展有限元法[15,16]（the elastic-plastic fracture mechanics based XFEM）。本书主要研究基于线弹性断裂力学的扩展有限元法。

1.1.2 扩展有限元法研究进展

截至 2018 年 12 月，谷歌学术中以“extended finite element method”为关键字可搜索到 1.38 万条结果（注：搜索范围 1999 年至 2018 年，关键字加引号），图 1-1 给出了 1999 年至 2018 年各年发表的包含“extended finite element method”关键字的文献数量。由图可见，扩展有限元法取得了丰硕的研究成果，且仍然保持着快速发展势头。本小节将从脆性断裂、延性断裂、疲劳断裂、微观断裂、复合材料、位错、动态断裂、裂缝面摩擦接触、板壳断裂、温度场问题、水力压裂等多个方面简述扩展有限元法的研究进展和相关重要文献。



注：① 数据来自谷歌学术；② 文中包含“extended finite element method”关键字，即称为相关文献

图 1-1　1999 年至 2018 年扩展有限元法相关文献数目

（1）脆性断裂

在扩展有限元法提出之前，有学者就尝试在有限元框架内研究描述不连续问题的方法，比如 Babuška 和 Oden 提出了广义有限元法[11,17]（generalized finite element method，GFEM）。该方法与扩展有限元法理论基础类似，但节点自由度的物理意义、形函数的特征、积分策略等有所不同[18]。扩展有限元法最早基于线弹性断裂力学（LEFM）理论提出[9,10]，因此被广泛用于研究解决玻璃、陶瓷、岩石、混凝土、灰铸铁等脆性或准脆性材料（通常将延伸率小于 5％的材料称为脆性材料的断裂问题。Fries 等[18]、Sukumar 等[19]、Huang 等[20]详细介绍了利用基于 LEFM 的扩展有限元来模拟脆性断裂问题的方法。Sukumar 等[21]将基于 LEFM 的扩展有限元法应用于三维平面裂缝的模拟，随后 Moës 等[22]又将其应用于三维非平面裂缝的模拟。Budyn 等[23]采用基于 LEFM 的扩展有限元法研究了平面多裂缝扩展和裂缝交叉问题。

除了基于线弹性断裂力学的扩展有限元法，基于内聚力模型（也称为黏聚裂缝模型或黏聚区模型）的扩展有限元法也被广泛应用于脆性断裂问题仿真。Wells[13]提出了基于内聚力模型的扩展有限元法，该方法未引入裂尖增强函数，且认为若裂尖附近的任意积分点的最大主拉应力超过材料的抗拉强度，则给断裂单元引入不连续增强函数，且不连续面之间的牵引力-位移关系满足内聚力模型。Moës 等[14]建立了更加详细的基于内聚力模型的扩展有限元法，该方法使用了非奇异裂尖增强函数，为了考虑断裂过程区（fracture process zone，FPZ），模型中包含两个裂尖，一个是数学裂尖，另一个是物理裂尖。Remmers 和 de Borst 等[24]将 Wells 的模型拓展到了多裂缝扩展问题。Zi 等[25]提出模拟黏聚裂缝问题的新型增强方案，即不论是裂缝贯穿单元还是裂尖增强单元，均采用符号距离函数进行增强，适用于线性三节点三角形单元和二次六节点三角形单元。Areias 和 Belytschko[26]研究了脆性和准脆性材料的三维断裂问题，其有限元模型采用四面体单元并采用空间三角形或空间四边形描述裂缝面。Meschke 和 Dumstorff[27]提出了基于整体能量的扩展有限元法，该方法可确定黏聚裂缝和非黏聚裂缝的扩展长度和扩展方向。Cox[28]根据线弹性材料平面应变和平面应力黏聚力裂缝裂尖场的解析特点，建立了对应的裂尖增强函数。

（2）延性断裂

延性断裂与塑性应变以及损伤相关。基于塑性断裂力学，Elguedj 等[15]基于幂硬化材料的裂尖应力场的 HRR（hutchinson rice rosengren）解[29]，提出了对应的塑性裂尖增强函数。Kumar 等[30]针对 Ramberg-Osgood 幂硬化材料，提出了与线弹性断裂裂尖增强函数类似的增强函数表达式，研究了大变形条件下塑性断裂裂缝扩展问题。Tran 等[31]提出了基于扩展有限元法的含裂缝延性结构的极限荷载计算方法，他们对比了线弹性裂尖增强函数和基于 HRR 解的塑性裂尖增强函数，发现后者更优。Kumar 和 Bhardwaj[32]等将 Heaviside 增强函数和斜坡函数（ramp function）相结合用于研究延性断裂扩展问题，其中斜坡函数用于确定裂尖增强单元内 Heaviside 增强函数对裂尖的影响比重，避免了裂尖增强函数的使用。

借助损伤理论研究延性断裂问题的关键问题之一是确定损伤变量和裂缝变形开裂过程之间的关系。Pourmodheji 等[33]将 Lemaitre 损伤模型[34]和扩展有限元法相结合研究了大变形条件下钢铁材料的延性断裂问题，认为损伤变量达到某一极值时裂缝扩展，裂缝扩展方向由最大主应力决定，由于延性断裂裂尖不存在应力和应变奇异性，因此不需要裂尖

增强，仅需 Heaviside 增强函数即可。Seabra 等[35]将 Lemaitre 非局部损伤(nonlocal damage)模型和扩展有限元法相结合，认为损伤变量达到某一极值时裂缝扩展，裂缝扩展方向由裂尖附近最大损伤积分点所在方位决定，增强函数采用 Heaviside 函数，并另外引入函数 R[35]以考虑裂尖所在单元 Heaviside 增强函数的取舍。Broumand 和 Khoei[16]同样将 Lemaitre非局部损伤模型和扩展有限元法相结合，应用于铝合金材料的延性裂缝扩展研究，但他们考虑了裂尖增强函数，发现极限损伤值、裂尖区域的增强半径、裂缝片段长度等对计算结果均有影响。

(3) 疲劳断裂

结合裂缝萌生准则和裂缝扩展速率模型，扩展有限元法可用于分析弹性和弹塑性疲劳裂缝扩展问题，其中裂缝扩展速率模型可分为两类：一类基于应力强度因子，如 Paris 准则[36](Paris 准则建立了应力强度因子和裂缝扩展速率之间的关系)；一类基于唯象模型(phenomenological model，所谓唯象是指不研究机理而仅通过概括试验现象而建立的模型)，如周期载荷作用下的黏聚区模型，这类模型可描述疲劳荷载作用下结构的损伤演化规律。

Singh 等[37]采用基于线弹性断裂力学的扩展有限元法，并结合 Paris 疲劳裂缝扩展速率准则研究了循环载荷条件下含缺陷(包括微裂缝、夹杂和空缺)平板的疲劳寿命，发现微裂缝、夹杂和空缺对结构的疲劳寿命均有影响，其中空缺影响最大、夹杂影响最小。Elguedj 等[38]采用基于弹塑性断裂力学的扩展有限元法，并结合 Paris 疲劳裂缝扩展速率准则研究了弹塑性疲劳裂缝扩展问题，同时还采用增广拉格朗日乘子法考虑了裂缝面的闭合接触作用。Liu 等[39]采用基于弹塑性断裂力学的扩展有限元法研究了铝合金材料的延性裂缝扩展问题，其塑性模型为基于 Von Mises 屈服准则、并采用各向同性强化模型，裂缝扩展方向由最大主应力确定，裂缝扩展速率由修正的 Paris 准则确定。Xu 和 Yuan[40]、Li 和 Yuan[41]采用扩展有限元法，并结合周期载荷作用下的黏聚区模型，研究了弹塑性疲劳裂缝扩展问题。

(4) 微观断裂和复合材料

宏观裂缝的萌生扩展行为以及材料的断裂韧度等力学特性与材料的微观构成、微观裂缝扩展模式相关[42]。借助有限元法进行材料微观断裂问题仿真时，需要沿着晶界(grain boundary)和相界(phase boundary)划分网格，然后结合黏聚区模型进行分析。扩展有限元法不受网格结构限制，无须预先定义裂缝扩展路径，因此可用于研究微观结构组成对微裂缝扩展行为的影响。另外，扩展有限元法还可用于研究结构微小的孔洞、夹杂、材料界面等问题。

Sukumar 等[19,43]采用基于线弹性断裂力学的扩展有限元法研究了陶瓷材料的脆性断裂问题，其采用蒙特卡罗算法构建晶粒有限元模型，并用最大能量释放率准则确定微观断裂模式(沿晶断裂或穿晶断裂)，研究表明扩展有限元法可用于晶粒水平的微观断裂仿真。Wang 等[44]利用 Voronoi tessellation 方法构建陶瓷材料的微观模型，采用基于线弹性断裂力学的扩展有限元法并结合最大主应力准则研究了微裂缝的穿晶扩展行为。Prakash 等[45]采用基于内聚力模型的扩展有限元法研究了钨合金的微观断裂问题，分析了晶界厚度和晶界的几何方位对微观裂缝扩展路径的影响。

Gracie 和 Belytschko[46]将扩展有限元法与桥域多尺度方法[47,48](bridging domain multi-scale method)相结合,其中扩展有限元法用于描述宏观裂缝面和滑移面,桥域多尺度方法用于沟通微观的原子尺度模型和宏观尺度模型。Aubertin 等[49]将扩展有限元法与分子动力学方法(molecular dynamics method)相结合用于动态断裂仿真,其中扩展有限元法用于描述宏观裂缝面,分子动力学方法用于从微观尺度描述裂尖的断裂行为。

在含有孔洞、夹杂等微小结构缺陷材料以及复合材料问题研究方面,Sukumar 等[50]最早提出了孔洞和夹杂问题的节点位移自由度增强函数,使得孔洞边缘和夹杂界面不必和单元边界重合,因此整个结构可划分为十分规则的网格。Moës 等[51]借助扩展有限元法研究了三维编织型复合材料、三维短纤维增强复合材料以及含有三维随机圆形孔洞结构的变形和应力分布,并和有限元法、快速傅立叶变换(fast Fourier transform,FFT)方法计算结果进行了对比。Hettich 和 Ramm[53]研究了二维圆形颗粒(圆形夹杂)增强复合材料的夹杂界面脱黏问题,其增强节点分为两类,即未脱黏的材料界面采用材料界面增强函数进行增强、已脱黏的材料界面采用 Heaviside 增强函数进行增强,材料界面的应力-应变关系采用黏聚力模型进行描述。Huynh 和 Belytschko[54]研究了纤维增强复合材料界面脱黏问题,建立了二维和三维扩展有限元模型,对于二维问题,采用的材料界面裂尖增强函数共 12 项。Zhang 和 Li[55]利用扩展有限元法研究了含有弹性夹杂的黏弹性材料的力学响应问题,发现扩展有限元法同样适用于黏弹性材料。Dréau 等[56]提出了一种用于研究材料界面的高阶扩展有限元模型及对应的增强函数。Singh 等[57]给出了含有裂缝、空缺和夹杂的功能梯度材料(functionally graded materials,FGMs)的扩展有限元分析方法。Sosa 等[58]应用 Sukumar 等提出的双材料界面裂尖增强函数[59],研究了玻璃纤维增强金属层压板(glass fibre reinforced aluminium laminate)的层间断裂问题。

(5) 位错

位错是指晶体材料内的分子发生了类似于剪切变形的不可逆的相对滑动,常见位错类型包括刃形位错、螺形位错、混合位错等,位错的存在对材料的力学性能影响极大。Ventura 等[60]首先给出了计算单一刃形位错(edge dislocations)引起的位移和应力场的扩展有限元法。Gracie 等[61]给出了同时计算多个刃形位错的扩展有限元法,其中位错滑移面(glide plane)的滑动位移采用 Belytschko 等[62]提出的切线方向的阶跃函数(tangential step function)进行增强,此外还提出了两种位错核心附近位移场的增强方案。Belytschko 和 Gracie[63]给出了含任意材料界面的刃形位错问题扩展有限元模拟方法。Oswald 等[64]借助扩展有限元法研究了薄壳结构(碳纳米管、薄膜等)的位错问题,给出了不同类型位错的增强函数。

(6) 动态断裂

为研究动态断裂问题,Réthoré 等[65]提出了满足能量守恒要求的基于线弹性断裂力学的扩展有限元算法,其裂尖增强函数为标准的线弹性断裂问题增强函数,时间积分算法为 Newmark 算法。Menouillard 等[66]采用显式积分算法研究了平面动态断裂问题(未考虑裂尖增强),提出了增强单元的集中质量矩阵组集方法(相比一致质量矩阵,集中质量矩阵可降低计算开销),研究表明,增强单元的最大显式时间步大小与传统有限元单元类似,说明基于显式时间积分的扩展有限元法可用于动态断裂问题仿真。Elguedj 等[67]提出了适用于任意增强函数的扩展有限元显式动态分析的集中质量矩阵组集的通用方法。Fries 和Zilian[68]研究了不同类型的时间积分算法对扩展有限元动态仿真收敛性的影

响，具体包括隐式欧拉积分（implicit Euler rule）、梯形积分（trapezoidal rule）和隐式中点积分（implicit midpoint rule）。Menouillard 等[69]提出了和时间相关的动态裂尖增强函数，并研究了各种裂缝扩展准则对裂缝动态扩展路径的影响。Haboussa 等[70]研究了孔洞对裂缝动态扩展过程的影响。Motamedi 和 Mohammadi[71]研究了复合材料的动态断裂问题，基于正交材料扩展裂缝的解析推导了对应的裂尖增强函数，并提出了相应的裂缝扩展准则。Vigueras 等[72]借助基黏聚区模型的扩展有限元法研究了复合材料的层间（interlaminar）和层内（intralaminar）断裂问题。Dongen 等[73]将连续损伤力学模型和扩展有限元模型相结合，并借助 ABAQUS 二次开发子程序接口（UMAT 和 UDMGINI）研究了复合材料断裂问题，其中基体的断裂采用扩展有限元法描述，层间断裂采用有限元黏聚裂缝模型描述。

（7）裂缝面摩擦接触

裂缝闭合后，裂缝面两侧可能会发生接触，接触问题是复杂的非线性问题，一般需要利用迭代方法确定裂缝面的接触状态（包括黏结、滑移、分离等状态）并计算接触力。最早在扩展有限元框架下研究裂缝面接触问题的是 Dolbow、Moës 和 Belytschko[74]，其采用非线性本构关系描述裂缝面的接触行为，并用 LATIN 方法（LATIN method）进行迭代求解。Khoei 和 Nikbakht[75,76]建立了基于罚函数法的扩展有限元裂缝面接触分析模型。Liu 和 Borja[77]采用库伦塑性模型（Coulomb plasticity model）描述裂缝面摩擦接触行为，借助罚函数法和增广拉格朗日法施加裂缝面接触约束，并用牛顿-拉普森迭代进行求解计算，研究了摩擦接触裂缝扩展问题。Giner 等[78]建立了两物体完全滑动接触问题的扩展有限元模型，依据解析解表达式提出了接触角（contact corner）增强函数。Khoei 和 Biabanaki 等[79]建立了基于罚函数法的扩展有限元模型，研究了三维物体摩擦接触问题。Hirmand 等[80]提出了基于增广拉格朗日乘子法的扩展有限元模型，并研究了裂缝面的摩擦接触问题。

（8）板壳断裂

最早利用扩展有限元法研究板壳断裂问题的是 Dolbow 和 Moës 等[81]，该研究采用 Mindlin-Reissner 平板理论（Mindlin-Reissner plate theory）研究了薄板穿透裂缝，并给出了基于互作用积分法的应力强度因子计算方法。Areias 和 Belytschko[82]建立了含贯穿裂缝壳体的扩展有限元模型，该模型考虑了材料非线性和几何非线性，给出了应力强度因子计算方法和裂缝扩展准则。Bachene、Tiberkak 和 Rechak[83]基于 Mindlin 平板理论（Mindlin plate theory）建立了扩展有限元模型，计算了含裂缝平板（边缘裂缝和中心裂缝）的固有频率和对应振型。Lasry 等[84]基于 Kirchhoff-Love 理论（Kirchhoff-Love theory）建立了薄板的扩展有限元模型，提出了两种裂尖增强方案，研究了模型的收敛性、刚度矩阵的条件数等问题，并和有限元法进行了对比。Bayesteh 和 Mohammadi[85]讨论了壳体裂尖增强函数对计算结果的影响（包括应力强度因子、裂缝张开位移、裂尖张角等）。为了研究曲面上任意形状裂纹的扩展过程，庄茁和成斌斌[86]提出了基于连续体壳单元（CB 壳单元）的扩展有限元法，该模型不要求裂缝面与壳中面垂直，可模拟复杂断裂情况。Nasirmanesh 和 Mohammadi[87]利用扩展有限元法研究了含裂缝功能梯度材料板壳结构的振动特性，包括各阶固有频率和对应的振型[88]。

（9）温度场

裂缝面的存在会对温度场分布产生重要影响，扩展有限元法可用于含裂缝、夹杂、孔洞等强弱间断面结构的温度场分析。Michlik 和 Berndt[89] 建立扩展有限元模型，研究了热障涂层中的复杂交叉裂缝，提出了基于绝热条件的裂缝面温度场增强方案。Duflot[90] 同时考虑裂缝面对位移场和温度场的影响，提出了基于绝热条件和等温条件下的裂缝面和裂尖温度场增强函数（若裂缝面热力学边界条件为绝热，则裂缝面法线方向热流量为零且温度不连续，即强间断；若裂缝面热力学边界条件为等温，则裂缝面两侧温度相同但热流量不连续，即弱间断，等温条件通过罚函数法施加），Duflot 研究了含裂缝结构的温度载荷作用下的裂缝扩展问题。Zamani 等[91] 提出了考虑了解析解高阶项的位移场增强函数和温度场增强函数，可用于直接计算热-弹性断裂问题裂尖应力强度因子。Yvonnet 等[92] 提出了基于扩展有限元法的三维任意形状材料界面热阻的计算方法。Hosseini 等[93] 借助扩展有限元法研究了外力载荷和稳态热载荷作用下正交各向异性功能梯度材料裂缝的扩展问题。Yu 和 Gong[94] 研究了含有圆形夹杂结构的温度场分布问题，给出了材料界面节点温度增强方法。Bouhala、Makradi 等[95] 利用扩展有限元法研究了热各向异性（thermo-anisotropic）材料的裂缝扩展问题，提出了绝热条件和等温条件下的裂缝面和裂尖温度场增强函数，以及与热各向异性材料相对应的位移场裂尖增强函数。Deng 等[96] 提出了扩展有限元框架下的热流强度因子（heat flux intensity factor，HFIF）计算方法。

（10）水力压裂问题

水力压裂是指为了提高油气采收率，将高压液体注入并用于压裂含有油气资源的岩层中，从而形成裂缝网络，以便为油气资源的抽采提供有效通道（详见第7章）。水力压裂过程中，缝内流体（流体压力）和裂缝面（地应力引起的裂缝面闭合压力）之间相互作用，因此水力压裂是典型的流固耦合过程。Lecampion[97] 给出了适用于水力压裂问题的两种裂尖增强函数，分别用于断裂韧度支配水力压裂问题和黏度支配水力压裂问题。Dahi Taleghani 和 Olson[98] 借助扩展有限元法研究了水力压裂裂缝和天然裂缝相互作用问题。Chen[99] 借助 ABAQUS 提供的扩展有限元模型研究了黏度支配压裂裂缝扩展问题。Mohammadnejad 和 Khoei[100,101] 将储层视为多孔介质，考虑储层的渗透性建立了扩展有限元流固耦合模型，他们主要研究了水力压裂裂缝的扩展问题。Gordeliy 和 Peirce[102] 考虑了裂缝尖端和流体前缘的间隙，提出了对应的裂尖增强方案和流固耦合算法。Shi 等[103,104] 借助差分算法计算支撑剂的运移，提出了支撑剂支撑裂缝的开度计算方法。Wang 和 Shi 等[105] 考虑储层的各向异性特征，提出了对应的压裂裂缝裂尖增强函数，研究了水力压裂裂缝的扩展行为。Mohammadnejad 和 Andrade[106] 将储层视为多孔介质，结合扩展有限元法和黏聚裂缝模型，研究了压裂液注入、注入结束后的裂缝闭合以及闭合后不同阶段的缝内压力、裂缝张开位移等的变化情况。Liu 等[107] 研究了天然裂缝的存在对压裂液滤失的影响，提出的扩展有限元模型认为流体压力在天然裂缝两侧连续，但流体压力的导数不连续。Shi 等[108] 提出了扩展有限元自由度缩减算法，该算法可大幅减少裂缝面接触迭代和流固耦合迭代的计算量。Liu 等[109] 采用扩展有限元研究了多缝同时压裂以及各缝之间的竞争问题，各缝内的流量分配取决于水平井流体压力、射孔压力损失以及各缝扩展状态等因素。Wang、Shi 等[110] 借助扩展有限元法，研究了水力压裂裂缝和黏结型天然裂缝以及摩擦型天然裂缝的交互作用问题。

（11）其他方面

除了上述典型应用以外，扩展有限元法在压电效应材料和电磁弹性材料断裂[111-116]、流体力学[117-123]、生物力学[124-127]、岩土力学[128-133]、拓扑优化[134-136]、相变问题（融化/凝固）[137-141]、剪切带[142-145]、梁单元断裂问题[146-149]等方面也有应用，详见相关文献。

1.1.3 扩展有限元法相关书籍和综述文章

扩展有限元法书籍的相关作者有 Mohammadi[150]、Pommier 等[151]、Mohammadi[152]、庄茁和柳占立等[153]、余天堂[154]、Bordas 和 Menk[155]以及 Khoei[156]。

扩展有限元法的综述性文章的相关作者包括 Karihaloo 和 Xiao[157]、李录贤等[158]、Abdelaziz 等[159,160]、Belytschko 和 Gracie 等[161]、Rabczuk 和 Bordas 等[162]、Fries 和 Belytschko[18]以及 Li 等[163]。

1.1.4 商业软件中的扩展有限元法

最早引入扩展有限元分析方法的商业有限元软件包括 ABAQUS 和 LS-DYNA，随后 ANSYS 也添加了扩展有限元分析功能，本小节对上述三个软件中的扩展有限元分析基本功能和特点做简要介绍。

（1）ABAQUS

法国达索公司的 ABAQUS 通用有限元分析软件从 6.9 版开始引入扩展有限元分析功能，最新版本 ABAQUS 2018（截至 2018 年 12 月）扩展有限元主要特点包括（ABAQUS 帮助文档：ABAQUS＞ABAQUS/CAE＞Modeling techniques＞Fracture mechanics＞Using the extended finite element method to model fracture mechanics）：

① ABAQUS 中的扩展有限元法分为两类，分别基于线弹性断裂力学（linear elastic fracture mechanics）模型和牵引分离黏聚力模型（traction-separation cohesive behavior）。

② 支持裂缝扩展仿真。

③ 可自动生成初始裂缝。

④ 支持平面单元和 3D 实体单元。

⑤ 可考虑裂缝面的接触。

⑥ 支持裂缝分叉和交叉模拟（仅适用于 2D）。

⑦ 支持准静态分析和隐式动态分析。

更多细节请参阅 ABAQUS 帮助文档。

（2）ANSYS

美国 ANSYS 软件在 16.0 版本加入了扩展有限元分析功能，最新版本 ANSYS 19.2（截至 2018 年 12 月）主要特点包括（ANSYS 帮助文档：Mechanical APDL＞Fracture Analysis Guide＞3. Crack-Growth Simulation, Interface Delamination, and Fatigue Crack Growth＞3.6. XFEM-Based Crack Analysis and Crack-Growth Simulation）：

① ANSYS 中的扩展有限元法依据是否考虑裂尖增强可分为两类。一类是裂尖奇异法（singularity-based method），该方法考虑裂尖增强，裂尖位置不受限制，支持 J 积分和应力强度因子的计算。第二类是虚拟节点法（phantom-node method），该方法不考虑裂尖增强，仅考虑 Heaviside 增强，裂尖必须位于单元边界上，不支持 J 积分和应力强度因子的计算。

② 支持裂缝扩展仿真。

③ 需要定义初始裂缝。

④ 支持平面单元和 3D 实体单元。

⑤ 可考虑裂缝面的接触。

⑥ 不支持裂缝交叉过程的模拟。

⑦ 仅能用于线弹性材料、准静态分析。

更多细节，请参阅上述 ANSYS 帮助文档。

（3）LS-DYNA

美国劳伦斯利弗莫尔国家实验室著名的显式动态分析程序 LS-DYNA（http://www.lstc.com/products/ls-dyna）同样支持扩展有限元分析，可用于 2D 平面应变单元和壳单元的断裂仿真。关于 LS-DYNA 扩展有限元的更多信息参见 *LS-DYNA XFEM User's Manual*。

1.2　关于本书程序 PhiPsi

本书提供了扩展有限元程序 PhiPsi（http://phipsi.top）及其部分 Fortran 源码，阅读源码并尝试在此源码的基础上增加其他功能，可帮助读者更加深刻地理解有限元、扩展有限元等计算方法的基本原理和编程实现过程。本书提供的 PhiPsi 程序源码可在 Windows 系统和 Linux 系统下编译并运行。

虽然大多数有关扩展有限元法文献中使用水平集法描述裂缝位置并追踪裂缝扩展过程，但该方法的普适性不强（3.4.4 小节），因此本书程序 PhiPsi 未使用水平集法，而是采用直接坐标法描述裂缝位置，详见 3.4.4 小节。

此外，有限元及扩展有限元法计算中，随着单元数目的增加，刚度矩阵和质量矩阵的内存占用量急剧增加（见附录 P），为了解决这一问题，在编写有限元和扩展有限元程序时，需要采用稀疏矩阵存储格式保存刚度矩阵和质量矩阵等数据（本书提供的源码未包含稀疏矩阵存储及计算功能），求解线性方程组时，采用稀疏线性求解器（见附录 F）。

本书资源文件提供的 Windows 系统下的相关文件，默认存储路径一律为 X 盘，若读者的操作系统中无 X 盘，可通过 Windows 系统磁盘管理功能对盘符进行修改。假如不进行上述相关修改，则需要对本书提供的 Fortran 源代码及关键字文件中涉及文件目录的部分进行相应调整。

本书提供的资源文件中的 PhiPsi Work 文件夹包含本书全部算例的关键字文件（*.kpp）以及输入数据文件，关于该文件夹的说明如下：① 将 PhiPsi Work 文件夹（含文件夹名）拷贝至 X 盘根目录下；② 仅适用于 Windows 64 位系统，不适用于 32 位系统；③ 双击 PhiPsi_Win64.exe 运行 PhiPsi，输入对应的关键字文件名，如 FEM.kpp，即可运行书中的对应算例；④ 运行批处理文件 PhiPsi_Run_all_in_sequential_for_book.bat，可顺序执行书中全部算例；⑤ 运行批处理文件 PhiPsi_Run_all_in_parallel_for_book.bat，可并行执行书中全部算例；⑥ 运行 Python 脚本 PhiPsi_Results_File_Deleter_Directly.py（需安装 Python 2.7，并安装 colorama 库，见附录 O），可删除全部计算结果文件。

资源文件夹中的 Source 文件夹包含本书程序 PhiPsi 的 Fortran 源代码（部分功能与 PhiPsi Work 文件夹提供的编译版 PhiPsi（PhiPsi_Win64.exe）相比有删减）。其中，Source\PhiPsi fortran codes 文件夹下的代码适用于 Windows 下的 Simply Fortran 编译器（详见

4.5节)，Source\Source_codes_of_PhiPsi_for_Linux 文件夹下的代码适用于 Linux 系统(详见 4.6 节)。

1.3　本书专用名词解释

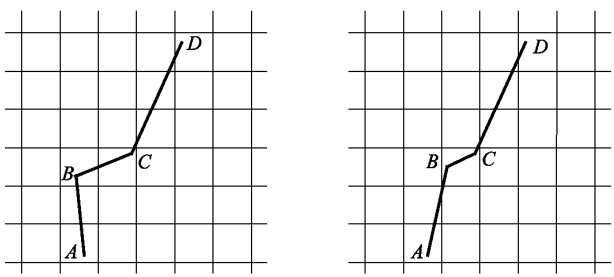
关于本书及 PhiPsi 程序中的一些专有名词，做以下说明：

(1) 计算点。本书将裂缝与单元的交点称为计算点，对于水力压裂分析(第 7 章)，计算点即为流体节点；计算点的编号有全局编号和局部编号之分，其中局部编号是相对于各裂缝自身而言的。

(2) 单元特征长度。单元平均面积的算术平方根。

(3) 裂缝片段。二维问题中，裂缝由若干个裂缝片段组成，每个裂缝片段为一直线段；基于本书采用的增强节点检测算法，PhiPsi 程序不允许某一单元包含独立的裂缝片段，即裂缝片段应至少跨过某一单元边线；如下图所示，图 1-2(a)中的裂缝由 3 个裂缝片段组成，即 AB、BC、CD，3 个裂缝片段均满足要求，而图 1-2(b)中的 BC 片段两个端点位于同一单元内，此时 PhiPsi 程序将弹出以下错误提示：

A complete crack segment found in one element. Message produced in Determine_Enriched_Nodes_Pre_Check.



(a)　(b)

图 1-2　二维问题裂缝片段示意图

(4) 裂缝点。组成裂缝片段的坐标点，分为端点和折点两类。

(5) 边缘裂缝。图 1-3 为典型的边缘裂缝，定义边缘裂缝时，必须确保一个裂缝端点在模型内部，另一裂缝端点位于模型外部(而非模型边界上)。

(6) 主动裂缝和被动裂缝。若 1 号裂缝朝 2 号裂缝扩展形成交叉裂缝，则 1 号裂缝称为主动裂缝，2 号裂缝称为被动裂缝。

(7) 支撑域(support domain)。是指单元节点插值函数的影响范围。如图 1-4 所示，对于本书采用的四节点四边形单元，若已知 9 号节点的位移，在插值计算单元内任意点的位移时，只有①、②、③、④单元内的点会用到 9 号节点的位移数据，因此 9 号节点的支撑域由①、②、③、④单元组成。

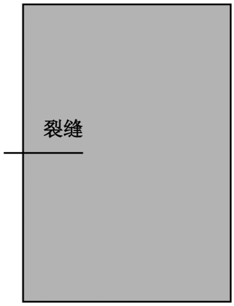


图 1-3 边缘裂缝示意图

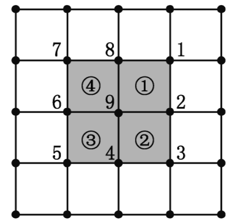


图 1-4 四节点四边形单元节点的支撑域示意图

1.4 本书内容编排

有限元法是扩展有限元法的基础。有限元法有两种基本格式,第一种方法以内力为基本未知量,称为力法或柔度法,第二种方法以节点位移为基本未知量,称为位移法或刚度法。后者更适用于计算机求解,因此绝大多数有限元程序采用此法,本书亦采用位移法有限元格式。本书第 2 章简要介绍有限元法的基本理论,重点阐述固体力学有限元基本方程 $\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{F}$ 推导的两种基本方法,即最小势能原理(虚功原理针对线弹性材料的特例)以及伽辽金法。关于有限元法的更多介绍参见文献[164]—[166]。此外,第 2 章最后一节将结合实例说明本书附带程序 PhiPsi 的使用方法。

扩展有限元法最早应用于断裂力学问题分析(后拓展并应用于材料界面、夹杂、空缺、温度场等问题的研究),至今该法最广泛的应用领域仍是断裂仿真。第 3 章主要围绕线弹性断裂问题,首先介绍线弹性断裂力学基本理论,包括应力强度因子、J 积分、互作用积分、能量释放率以及裂缝扩展准则等。然后,在单位分解法的基础上,给出扩展有限元框架下裂缝问题的位移插值函数及其一系列相关问题的处理。此外,本章还将简单介绍其他问题包括孔洞、夹杂、材料界面、多晶材料的扩展有限元位移增强函数。本章其他内容还包括,基于伽辽金有限元法推导断裂问题的离散控制方程、强弱间断问题的数值积分方案及其对比、裂缝开度的计算方案、变形后裂缝的后处理方法、随机初始裂缝的生成方法等。

本书除了介绍扩展有限元基本理论之外,还着重阐述计算力学程序(包括有限元和扩展有限元)的编写方法,并提供基于 Fortran 语言编写的 PhiPsi 程序。因此,第 4 章将介绍本书程序 PhiPsi,具体包括 PhiPsi 的输入输出文件及中间数据文件介绍、PhiPsi 主程序结构流程图及各个分支主干程序流程图、PhiPsi 的多种运行方式介绍、PhiPsi 对应的 MatLab 后处理程序介绍、子程序/函数功能说明、程序内部变量说明等内容。

复杂裂缝网络必然涉及裂缝交叉问题,第 5 章详细介绍交叉裂缝的扩展有限元模拟方法,包括 T 形交叉、十字形交叉、雪花形交叉等,而其中的十字形交叉和雪花形交叉均可视为多组 T 形交叉裂缝的组合。此外,5.5 节将介绍裂缝交汇过程的具体算法。

裂缝有张开状态和闭合状态之分,裂缝闭合时若不考虑裂缝面间的接触,则裂缝面将发生嵌入,与实际情况不符。裂缝面接触状态以及接触力的计算方法主要有罚函数法、拉

格朗日乘子法以及增广拉格朗日乘子法。第 6 章将详细介绍扩展有限元框架下接触裂缝的模拟方法。

水力压裂的目的是形成复杂的裂缝网络,以便为油气资源抽采提供有效通道。水力压裂过程涉及压裂裂缝和天然裂缝相互作用问题,常规有限元法由于受到网格划分的影响,计算成本较高,因此扩展有限元法在水力压裂仿真方面具有广阔的应用前景。第 7 章围绕水力压裂问题的各个方面展开详细介绍,在推导水力压裂问题离散控制方程后(7.2 节),7.3 节介绍了流固耦合方程的牛顿-拉普森迭代计算方法,7.4 节探讨水力压裂裂缝和摩擦型、胶结型两类天然裂缝的交互准则,7.5 节和 7.6 节介绍支撑剂和支撑裂缝相关计算方法,7.7 节介绍流固耦合迭代求解的自由度缩减技术。此外,7.8 节还将介绍场问题(温度场、渗流场等)的扩展有限元分析方法。

本书第 8 章研究动态断裂问题,动态问题与静态(准静态)问题的本质区别在于,前者考虑了牛顿第二定律,即载荷对物体运动状态(有限元模型中体现为节点的加速度和速度)的影响,静态问题只研究力和力引起的物体形变(有限元模型中体现为节点的位移),而不研究物体的运动状态。本章给出动态问题常用的裂尖增强方案(8.3 节),介绍两种不同的时间积分算法,即显式时间积分算法和 Newmark 隐式时间积分算法(8.4 节),给出动态应力强度因子的计算方法(8.5 节)以及动态裂缝扩展准则(8.6 节)。

将扩展有限元从二维过渡到三维,理论上不存在困难,但编程实施的难度却大幅提升。第 9 章将简要介绍三维问题的扩展有限元实施方法,主要从编程的角度,结合八节点六面体三维单元(9.2 节)介绍增强节点的确定方法(9.3 节)、整体坐标到自然坐标的转换算法(9.4 节)、三维应力强度因子的计算(9.5 节)等内容。

本书第 10 章结合 Visual Basic. net 语言介绍有限元法和扩展有限元法处理软件的编写方法,具体包括图标按钮的制作、程序窗体的动态尺寸调整、绘图对象的移动和缩放、云图的绘制、Fortran 计算内核的调用方法等内容。最后,本章还介绍了利用 Matlab GUI 编写 GUI 程序的基本方法。

本书除了第 1 章、第 4 章、第 10 章之外,各章的最后一节都给出了计算实例,并提供了相关文件。

本书最后为附录部分,具体内容如下(注:篇幅所限,部分附录的具体内容需从本书对应网站下载,详见 1.5 节)。

附录 A——偏微分方程。介绍了微分方程和微分算子、偏微分方程的分类、初(边)值问题、微分方程的等效积分形式和等效积分弱形式、微分方程的边界条件(狄利克雷边界条件、诺依曼边界条件等)等内容。

附录 B——泛函、变分法及变分原理。通过最速降线问题简单介绍了泛函(函数的函数)和变分(变分相对于泛函,对应于微分相对于函数)的概念。

附录 C——梯度、散度及拉普拉斯算子。介绍了计算力学中广泛使用的梯度算子(标量化为矢量)、散度算子(矢量化为标量)、旋度算子(矢量化为矢量)以及拉普拉斯算子(标量化为标量)。

附录 D——格林定理、散度定理。其中,散度定理广泛用于推导控制方程的等效积分弱形式。

附录 E——矢量和张量。张量是计算力学中的基本概念,附录 E 从矢量出发介绍了张

量的概念,并说明了张量并矢积、点积、双点积及其运算规则。

附录F——线性方程组的求解方法。计算力学的本质是将物理问题偏微分控制方程的求解转换成适合计算机求解的矩阵运算问题,而其中线性方程组的求解是较为耗费计算资源的部分,不同求解方法各有优缺点,附录F对此进行了介绍。

附录G——非线性方程组的求解。许多问题不是单纯的线性问题,如材料非线性问题(如塑性问题,本书未探讨)、接触非线性问题(第6章)、几何非线性问题(大变形,本书未探讨)、流固耦合问题(第7章)等,这类问题的求解,需要借助迭代算法,其中牛顿-拉普森迭代方法应用最为广泛。

附录H——高斯积分点坐标及积分权重。本书有限元离散数值积分一律采用经典的高斯积分(2.6节),本附录给出了不同积分点数目对应的积分点坐标及其权重,以便查询使用。

附录I——Fortran及Simply Fortran编译平台介绍。简要概括了常见的Fortran编译器及编译平台,并详细介绍了基于开源的gfortran编译器的Simply Fortran集成开发环境。

附录J——Fortran常用的开源代码库。简要介绍了常用的Fortran开源代码库。

附录K——共享内存并行计算OpenMP。随着计算模型规模的增大,单核心计算无法满足计算需求,为解决该问题,应用较多的并行计算体系架构是多核共享内存的OpenMP,附录K结合Simply Fortran集成开发环境对OpenMP进行了简要介绍。

附录L——文本编辑器Notepad++简介。计算力学编程涉及大量代码,高效的代码编辑工具可以起到事半功倍的效果,附录L简单介绍了Notepad++文本编辑器的使用方法。

附录M——ANSYS前处理宏文件。本书程序PhiPsi运行所需的输入文件是由ANSYS生成的,即在ANSYS中进行建模,运行本书提供的宏文件(包括用于二维问题的Ansys2PhiPsi_2D.mac和用于三维问题的Ansys2PhiPsi_3D.mac),导出PhiPsi输入数据,本附录给出了宏文件的具体代码。

附录N——PhiPsi关键字。与ANSYS的命令流和ABAQUS的关键字类似,本书作者为PhiPsi程序定义了一套完整的关键字体系。

附录O——Python脚本文件说明。本附录简要介绍了基于Python语言编写的几个脚本程序。

附录P——稀疏矩阵存储格式。随着计算模型单元数目的增加,刚度矩阵、质量矩阵的规模将非线性增加,内存占用量也会大幅增长,解决该问题的方案之一是采用稀疏矩阵存储格式。

附录Q——斜截面上的牵引力 $t=\sigma \cdot n$。给出了斜截面上牵引力 $t=\sigma \cdot n$ 的推导过程。

附录R——分部积分。给出了二维分部积分公式的推导过程。

附录S——张量在程序中的表示方法。计算机程序语言只能处理矩阵和向量,无法表达高阶张量,因此需要一套对应规则,将高阶张量与矩阵或向量对应起来,附录S详细说明了这一对应过程。

1.5 本书对应网页

本书对应网页为 http://phipsi.top/other_book_xfem.html，该网页包含以下内容：① 本书全部资源文件；② 受篇幅限制未能直接在书中给出的内容；③ 本书全部图片的彩色原始文件；④ 错误修正，包括读者反馈的公式错误、编号错误、印刷错误以及源代码 bug 修正等；⑤ 本书对应的 PhiPsi 最新程序、算例、文档等；⑥ 留言板，读者可通过留言板给作者留言、反馈错误、点评本书内容。